MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 12
03.07.2015

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)“

1. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2011*

   Geben Sie eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{3,3}$ an, welche (bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$) eine Drehung um die vom Vektor $v = (1, 1, -1)^t$ aufgespannten Drehachse mit Drehwinkel $\phi = \frac{\pi}{2}$ beschreibt.
   Hinweis:
   Finden Sie zuerst eine Orthonormalbasis $v_1, v_2, v_3 = \frac{v}{\|v\|}$ von $\mathbb{R}^3$.
   Da die orthogonale Matrix U eine Drehung um die Drehachse v_3 mit Winkel $\pi/2$ darstellt, gilt entweder $Uv_1 = v_2$, $Uv_2 = -v_1$, $Uv_3 = v_3$ oder $Uv_1 = -v_2$, $Uv_2 = v_1$, $Uv_3 = v_3$. Vergewissern Sie sich, dass die oben angegebene Abbildungsvorschrift gilt! Hierfür ist auch eine Skizze hilfreich. Mit Hilfe des Prinzipes der linearen Forstezung können Sie nun für beide Fälle die Matrix U konstruieren.

2. *Staatsexamensauafgabe Frühjahr 2009*

   Es sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, welche eine Drehung des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ mit der Drehachse $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ und einem Drehwinkel von $90°$ beschreibt. Bestimmen Sie eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $g(x) = T \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.
   Hinweis: Der Aufgabentyp ist mit Aufgabe 1 identisch. Lösen Sie aber nun die Aufgabe mit Hilfe der darstellenden Matrix von g bezüglich einer von Ihnen konstruierten Orthonormalbasis v_1, v_2, v_3 des $\mathbb{R}^3$.

3. *nach Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2006*

   Gegeben seien die Vektoren

   $$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

   Weiter sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear mit

   $$f(e_1) = e_2, \quad f(e_2) = e_3, \quad f(e_3) = e_1.$$

   Zeigen Sie, dass f eine Drehung ist. Bestimmen Sie die Drehachse von f und den Cosinus des Drehwinkels α von f.
   Hinweis: Mit Hilfe der Abbildungsmatrix A von f kann gezeigt werden, dass $A \in O_3(\mathbb{R})$ eine Drehung darstellt. Die Drehachse erhalten Sie mit Hilfe des Eigenraumes $\mathrm{Eig}(A, \lambda = 1)$.

4. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2013*

Es seien $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Standardskalarprodukt.

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis b_1, b_2 des von den Vektoren v_1, v_2 aufgespannten Untervektorraums U.

b) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung

$$v_1 \mapsto \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad v_2 \mapsto \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zu einer orthogonalen Abbildung von $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ fortgesetzt werden kann. Bestimmen Sie alle solchen Fortsetzungen.
Hinweis: In Teilaufgabe a) haben Sie eine Orthonormalbasis b_1, b_2 des von den Vektoren v_1, v_2 aufgespannten Untervektorraums U konstruiert. Geben Sie mit Hilfe der oben angegebenen Abbildungsvorschrift $f(b_1)$ und $f(b_2)$ an. Ergänzen Sie nun b_1, b_2 zu einer ONB b_1, b_2, b_3 des $\mathbb{R}^3$. Um alle orthogonalen Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ anzugeben, benutzen Sie die Eigenschaft, dass $f(b_1), f(b_2), f(b_3)$ ebenfalls eine ONB des $\mathbb{R}^3$ darstellt.